13.III Nieprzemienny torus

Rozważmy $H=L^2(\mathbb{T})$ gdzie $\mathbb{T}\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest okręgiem oraz połóżmy:

$$Uf(t)=e^{2\pi i t}f(t), \quad Vf(t)=f(t+\theta)$$ gdzie $\theta\in\mathbb{R}$. Wówczas:

$$VUf(t) = (Uf)(t+\theta) = e^{2\pi i(t+\theta)} f(t+\theta) = e^{2\pi i\theta} e^{2\pi i t} f(t+\theta) =$$

$$= e^{2\pi i\theta} UVf(t) \quad \text{zatem} \quad VU = e^{2\pi i\theta}UV$$

Nie używając interpretacji $\mathbb{T}\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ będziemy mieli:

$$Uf(z)=zf(z), \quad Vf(z)=f(e^{2\pi i\theta}z)$$ oczywiście też:

$$VUf(z) = Uf(e^{2\pi i\theta}z) = e^{2\pi i\theta}z\cdot f(e^{2\pi i\theta}z) = e^{2\pi i\theta}UVf(z).$$

Jak już wiemy, uniwersalna C^*-algebra z jedynką generowana przez dwa elementy unitarne u,v z relacją $vu=e^{2\pi i\theta}uv$ istnieje (zobacz konstrukcję po tw. K.5) — powyższa konkretna realizacja zapewnia nam istnienie ale wcale nie wynika stąd że $C^*(U,V)$ gdzie U,V jak wyżej już sama jest uniwersalna. Mamy jednak (przy oznaczeniu A_θ - uniwersalnej C^* alg.)

Tw III.1. Gdy $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ to A_θ jest prosta (zob. K. Davidson - C^*-by example)

Wniosek Niech $A:=C^*(U,V)$ gdzie U,V jak powyżej. Weźmy epimorfizm $\alpha: A_\theta \to A$ takie że $\alpha(u)=U$, $\alpha(v)=V$. Skoro A_θ jest prosta oraz $\alpha\neq 0$ to

$$\begin{cases}\ker\alpha - \text{ideał} \\ \ker\alpha\neq A_\theta\end{cases} \xRightarrow{\text{prostość}} \ker\alpha=\{0\}$$ zatem jest to izomorfizm.

Inne informacje na temat A_θ:

→ K-teoria dla A_θ wygląda następująco: $K_0A_\theta \cong K_1A_\theta\cong\mathbb{Z}$ dla $\theta\notin\mathbb{Q}$ w szczególności (bo $K_1\neq 0$) A_θ nie jest AF-algebrą

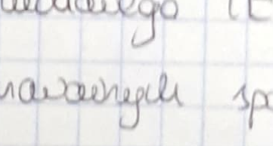
→ A_θ da się jednak zanurzyć w AF-algebrę z tą samą grupą K_0 (Pimsner, Voiculescu)

→ $A_\theta = \varinjlim A_n$ gdzie $A_n = M_{k_n}(C(\mathbb{T}))\oplus M_{k_n'}(C(\mathbb{T}))$ oraz liczby k_n, k_n' otrzymuje się z przedstawienia θ jako ułamka łańcuchowego (Elliot, Evans)

→ A_θ można zdefiniować na wiele równoważnych sposobów

• generatory i relacje (tak jak wyżej przedstawiono)

• jako crossed-product $C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}$



• jako C^*-algebrę dla foliacji torusa

• jako deformację - kwantyzację

• jako tzw. twisted group algebra

→ gdy $\theta = \frac{p}{q}$ jest wymierne to zachodzi następujące tw. (zob. M. Khalkhali)

<u>Tw.</u> Istnieje płaska zespolona wiązka wektorowa E rangi q na $\mathbb{T}^2$ taka, że
$$A_{\frac{p}{q}} \simeq C(\mathbb{T}^2, End(E)) \quad \text{(ciągłe sekcje).}$$

→ tw. Stone'a - von Neumanna mówi, że (repr. dla klasycznej relacji komutacji)

$QP - PQ = iI$ ≡ para grup jednoparametrowych $U(t), V(s)$ - gr. unitarnych
P - położenie Q - pęd tż. $U(t)V(s) = e^{-ist}V(s)U(t)$

Ta druga interpretacja, zaproponowana została przez Weyla.

Dowód tw. III 1.

• ustalmy λ, μ takie, że $|\lambda| = |\mu| = 1$ oraz rozważmy λu i μv: wówczas $(\lambda u)\cdot(\mu v) = \lambda\mu(uv) = \lambda\mu(e^{-2\pi i\theta}vu) = e^{-2\pi i\theta}\cdot(\mu v)(\lambda u)$ zatem para $(\lambda u, \mu v)$ spełnia naszą relację. Zatem istnieje epimorfizm $\rho_{\lambda,\mu}: A_\theta \to A_\theta$ że
$$\begin{cases}\rho_{\lambda,\mu}(u) = \lambda u\\ \rho_{\lambda,\mu}(v) = \mu v\end{cases}$$
• to jest automorfizm bo $\rho_{\bar\lambda,\bar\mu}\rho_{\lambda,\mu}$ działa jak id bowiem:
$\rho_{\bar\lambda,\bar\mu}\rho_{\lambda,\mu}(u) = \rho_{\bar\lambda,\bar\mu}(\lambda u) = \bar\lambda\lambda u = |\lambda|^2 u = u$ podobnie
$\rho_{\lambda,\mu}\rho_{\bar\lambda,\bar\mu}(u) = \ldots = u$ i tak samo dla v zatem skoro

$\rho_{\bar\lambda,\bar\mu}\rho_{\lambda,\mu} = \rho_{\lambda,\mu}\rho_{\bar\lambda,\bar\mu} = id$ na u i v to także na $C^*(u,v)$; skoro u, v generują A_θ to $\rho_{\bar\lambda,\bar\mu}\rho_{\lambda,\mu} = \rho_{\lambda,\mu}\rho_{\bar\lambda,\bar\mu} = id$

• niech $f: \mathbb{T}^2 \to A_\theta$ $f(\lambda,\mu) = \rho_{\lambda,\mu}(A)$ gdzie A - ustalone. Wówczas f - ciągła

→ dla u (lub v) mamy $f(\lambda,\mu) = \rho_{\lambda,\mu}(u) = \lambda u$ ⇝ to jest ciągłe i

→ ogólniej dla wielomianu $p(u,v,u^*,v^*)$ mamy $f(\lambda,\mu) = \rho_{\lambda,\mu}(p(u,v,u^*,v^*))$
$\overset{\text{bo } \rho_{\lambda,\mu}\text{-homomorfizm}}{=} p(\rho_{\lambda,\mu}(u), \rho_{\lambda,\mu}(v), \rho_{\lambda,\mu}(u)^*, \rho_{\lambda,\mu}(v)^*) = p(\lambda u, \mu v, \bar\lambda u^*, \bar\mu v^*)$ i to jest ciągłe ze względu na λ, μ

→ wreszcie gdy $g(u,v,u^*,v^*)$ jest funkcją ciągłą (tzn. dowolny element A_θ) to
$g(u,v,u^*,v^*) = \lim_{n\to\infty} p_n(u,v,u^*,v^*)$ i $f(\lambda,\mu) = \rho_{\lambda,\mu}(g(u,v,u^*,v^*)) = \rho_{\lambda,\mu}(\lim_{n\to\infty} p_n(u,v,u^*,v^*)) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\rho_{\lambda,\mu}(p_n(u,v,u^*,v^*))$ zatem mamy dla $\lambda_m \to \lambda$, $\mu_m \to \mu$ że

$f(\lambda_m,\mu_m)$
$\lim_{m,k\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\rho_{\lambda_m,\mu_m}(p_n(u,v,u^*,v^*))) \overset{\text{dla wiel. jest ciągłość}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{m,k\to\infty}\rho_{\lambda_m,\mu_m}(p_n(u,v,u^*,v^*)) =$
$= \lim_{n\to\infty}\rho_{\lambda,\mu}(p_n(u,v,u^*,v^*)) = \ldots = f(\lambda,\mu).$

• Wprowadźmy $\Phi_1(A) := \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi it}}(A)\,dt$, $\Phi_2(A) = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi it},1}(A)\,dt$ (całka Riemanna: funkcja podcałkowa jest ciągła)

(1) bo automorfizmy są ciągłe

Tw. Φ_1 ma następujące własności

a) jest kontrakcją
b) obrazem Φ_1 jest $C^*(u)$
c) $\Phi_1^2 = \Phi_1$
d) jest nieujemny i wierny [1]
e) $\Phi_1(f(u)Ag(u)) = f(u)\Phi_1(A)g(u)$ dla $f,g \in C(\mathbb{T})$
f) $\Phi_1(\sum_{k,l} a_{kl} u^k v^l) = \sum_k a_{k0} u^k$
g) $\Phi_1(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^j A u^{-j}$

Dowód a) $\Phi_1(A)$ to suma Riemanna więc jest kombinacją wypukłą $\{\rho_{1,e^{2\pi i t}}(A) \; t\in[0;1]\}$ oraz $\|\rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\| = \|A\|$ więc $\|\Phi_1(A)\| \le \|A\|$. Skoro $\Phi_1(I)=I$ to $\|\Phi_1\|=1$

b) skoro $\rho_{1,e^{2\pi i t}}(u) = 1\cdot u = u$ dla $t\in\mathbb{R}$ więc $\rho_{1,e^{2\pi i t}}|_{C^*(u)} = id_{C^*(u)}$ zatem $C^*(u) \subseteq \operatorname{im}\Phi_1$

Dalej e) $\Phi_1(f(u)Ag(u)) = \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(f(u)Ag(u))\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(f(u))\,\rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\,\rho_{1,e^{2\pi i t}}(g(u))$
$\overset{(2)}{=} \int_0^1 f(u)\,\rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\,g(u)\,dt \overset{(3)}{=} f(u)\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\,dt\; g(u) = f(u)\Phi_1(A)g(u)$. Ponadto mamy:

(1) bo ρ - morfizm (2) bo $\rho|_{C^*(u)} = id_{C^*(u)}$
(3) wyciągamy stałe

$\Phi_1(u^kv^l) = \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(u^kv^l)\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(u)^k\,\rho_{1,e^{2\pi i t}}(v)^l\,dt \overset{(2)}{=} \int_0^1 u^k(e^{2\pi i t}v)^l\,dt \overset{(3)}{=} u^k\left(\int_0^1 e^{2\pi i l t}\,dt\right)v^l = \begin{cases}0 & l\neq 0\\ u^k & l=0 \quad (\text{bo } v^l=v^0=I)\end{cases}$

Zatem Φ_1("wielomiany od u,u^*,v,v^*") $\subseteq C^*(u) \Rightarrow \operatorname{im}\Phi_1 \subseteq C^*(u)$ i także $C^*(u)\subseteq \operatorname{im}\Phi_1$

Stąd $\operatorname{im}\Phi_1 = C^*(u)$

c) bo $\Phi_1|_{C^*(u)} = id$ oraz $\operatorname{im}\Phi_1 = C^*(u)$

d) niech $A\geq 0 \Rightarrow \rho_{1,e^{2\pi i t}}(A) \geq 0$ bo ρ - automorfizm [2] więc $\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\,dt \geq 0$

Gdy $A\neq 0 \Rightarrow \rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\neq 0$ więc $\int_0^1 \rho_{1,e^{2\pi i t}}(A)\,dt \neq 0$ (całka po zb. miary >0 funkcji nieujemnej).

f) jest bo $\Phi_1(u^kv^l) = \begin{cases}0 & l\neq0\\ u^k & l=0\end{cases}$ i z liniowości i ciągłości mamy to co trzeba

g) najpierw dla u^kv^l mamy:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^n u^j(u^kv^l)u^{-j} \overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^n e^{-2\pi i\theta(j+k)l}\, v^l \underbrace{u^{j+k}u^{-j}}_{u^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^n e^{-2\pi i\theta(j+k)l}$
$\cdot\, e^{2\pi i\theta kl}\, u^kv^l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^n e^{-2\pi i \theta jl}\,u^kv^l = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{-\sin((2n+1)\pi l\theta)}{\sin(\pi l\theta)}\right)u^kv^l = 0$

gdy $l\neq0$ (bo ułamek ogr. a $\frac{1}{2n+1}\to0$) dla $l=0$ to jest stale u^k

(4) $uuuvv \to vuuuv \to vvuuu$
więc $u^kv^l \to v^lu^k$ kl-przestawień
$u^{j+k}v^l = e^{-2\pi i\theta(k+j)l}$

więc to jest równe $\Phi_1(u^kv^l)$. Ponieważ to wyrażenie z gr. jest liniowe i ciągłe

to $\Phi_1(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} u^jAu^{-j}$ ⊠

Oczywiście analogiczny rezultat działa także dla Φ_2.

[1] tzn. $\Phi_1(A)\geq 0$ dla $A\geq 0$ oraz $\Phi_1(A)\neq 0$ gdy $A\geq 0$ i $A\neq 0$

[2] morfizm zach. nieujemność: $A\geq0 \Rightarrow A=B^*B \Rightarrow \rho(A)=\rho(B^*B)=\rho(B)^*\rho(B)\geq0$

Tw. Odwzorowanie $\tau : A_\theta \to A_\theta$ jest śladem o wartościach w $\mathbb{C}I$.
$\tau = \Phi_1 \Phi_2$

Dowód $\to \Phi_1 \Phi_2 (u^k v^l) = \delta_{k0} \Phi_1 (v^l) = \delta_{k0} \delta_{l0} I = \begin{cases} I & \text{gdy } l=k=0 \\ 0 & \text{gdy } l\neq 0 \text{ lub } k \neq 0 \end{cases}$ tak samo

$\Phi_2 \Phi_1 (u^k v^l) = \delta_{l0} \Phi_2 (u^k) = \delta_{l0} \delta_{k0} I = \begin{cases} I & k=l=0 \\ 0 & k\neq 0 \text{ lub } l \neq 0 \end{cases}$ więc $\Phi_1 \Phi_2 = \Phi_2 \Phi_1 \ (= \tau)$

Co więcej $\operatorname{im} \tau \subseteq \mathbb{C}I$ bo na generatorach tak jest

$\to$ • $A \geq 0 \Rightarrow \Phi_2(A) \geq 0 \Rightarrow \Phi_1(\Phi_2(A)) \geq 0$ i gdy dodatkowo
• $A \neq 0 \Rightarrow \Phi_2(A) \neq 0 \Rightarrow \Phi_1(\Phi_2(A)) \neq 0$

Dalej $\left.\begin{array}{l} \|\Phi_1(\Phi_2(A))\| \leq \|\Phi_2(A)\| \leq \|A\| \\ \tau(I) = \Phi_1 \Phi_2 (I) = \Phi_1(I) = I \end{array}\right| \Rightarrow \|\tau\| = 1$

$\to$ $\tau(AB) = \tau(BA)$ bo dla jednomianów mamy

$\tau(\underbrace{(u^k v^l)(u^m v^n)}_{\text{te przestawiamy}}) = \tau(e^{2\pi i \theta lm} u^{k+m} v^{l+n}) = e^{2\pi i \theta lm} \tau(u^{k+m} v^{l+n}) =$

$= \begin{cases} e^{2\pi i \theta lm} I & k+m = l+n = 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

$\tau((u^m v^n)(u^k v^l)) = \tau(e^{2\pi i \theta kn} u^{k+m} v^{l+n}) = e^{2\pi i \theta kn} \tau(u^{k+m} v^{l+n}) =$

$= \begin{cases} e^{2\pi i \theta kn} I & k+m = 0 = l+n \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Jednak gdy $\left.\begin{array}{l} k+m=0 \Rightarrow k=-m \\ l+n=0 \Rightarrow n=-l \end{array}\right| \Rightarrow kn = (-m)(-l) = ml$ więc to jest to samo

$\to$ z liniowości i gęstości $\tau(AB) = \tau(BA)$ ⊠

Dowód III.1. Niech $J \subseteq A_\theta$ jest ideałem (niezerowym). Wówczas istnieje $X \in J$, $X \neq 0$ i możemy założyć że $X \geq 0$ (1). Wówczas

$u^j X u^{-j} \in J \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j X u^{-j} \in J \Rightarrow \lim(\_) \in J \Rightarrow \Phi_1(X) \in J \overset{(2)}{\Rightarrow} \tau(X) \in J$

Skoro $\left.\begin{array}{l} X \geq 0 \\ X \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \tau(X) \neq 0$ oraz $\tau(X) = \lambda I$ dla pew. $\lambda > 0$

(2) bo analogiczny wzór dla Φ_2 też zachodzi

Zatem $\lambda I \in J \Rightarrow I \in J \Rightarrow J = A_\theta$ ⊠

Uwaga: nawet nie potrzebowaliśmy wiedzieć, że jest to ślad: wystarczyło że $\operatorname{im} \tau \subseteq \mathbb{C}I$, i że jest wierny oraz że nie wypadamy z ideału!

Tw. τ jest jedynym śladem.

Dowód. Niech τ' - inny ślad na A_θ: wtedy $\tau'(A) = \tau'(UAU^{-1}) = \tau'(u^j A u^{-j})$

skąd $\tau'(A) = \tau'(\frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j A u^{-j}) = \tau'(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} u^j A u^{-j}) = \tau'(\Phi_1(A)) = \tau'(\Phi_1(A))$

(1) bo gdy $X \in J$ to $\operatorname{Re} X, \operatorname{Im} X$ też wreszcie gdy $X = X^* \in J$ to także $X^+, X^- \in J$
(de facto J jest C^*-podalgebrą!)

Tak samo $\tau'(A) = -\tau'(\Phi_2(A)) = -(-\tau'(\Phi_1\Phi_2(A))) = \tau'(\underbrace{\tau(A)}_{\in \mathbb{C}I \text{ oraz } \tau'(I)=I}) = \tau(A)$ ⊠

<u>Uwaga:</u> → gdy $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ to $V^q f(t) = f(t + \frac{p}{q}) = f(t)$

wpc $V^q = I$. Jednak $\underset{\substack{\shortparallel \\ I}}{\rho_{1,e^{2\pi i t}}(I)} = \rho_{1,e^{2\pi i t}}(V^q) = (\rho_{1,e^{2\pi i t}}(V))^q = \underset{\substack{\shortparallel \\ e^{2\pi i q t} I}}{(e^{2\pi i t}V)^q} \underset{V^q = I}{=}$

zatem powinno być $e^{2\pi i q t} = 1$ ale możemy wziąć takie t aby tak nie było.

Gdzie tkwi błąd? Otóż $\rho_{1,e^{2\pi i t}}$ są zdefiniowane na A_θ (uniwersalnej) zaś $V^q = I$ w konkretnej realizacji. To rozumowanie pokazuje, że $A_\theta \not\cong C^*(U,V)$ gdy $\theta \in \mathbb{Q}$, tzn. reprezentacja nie jest wierna

→ nawet gdy $\theta \in \mathbb{Q}$ to $\Phi_1(U^k V^l) = 0$ dla $l \neq 0$ (rachunek nie korzystał z postaci θ) jednak formuła z granicą dla $l = q$ gdzie $\theta = \frac{p}{q}$ przyjmuje postać:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \underbrace{e^{-2\pi i \theta j l}}_{\text{całk. wid.}} U^k V^l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} U^k V^l = \lim_{n\to\infty} U^k V^l = U^k V^l = U^k V^q \neq 0$$ wpc Φ_1 nie

jest równe temu wyrażeniu.